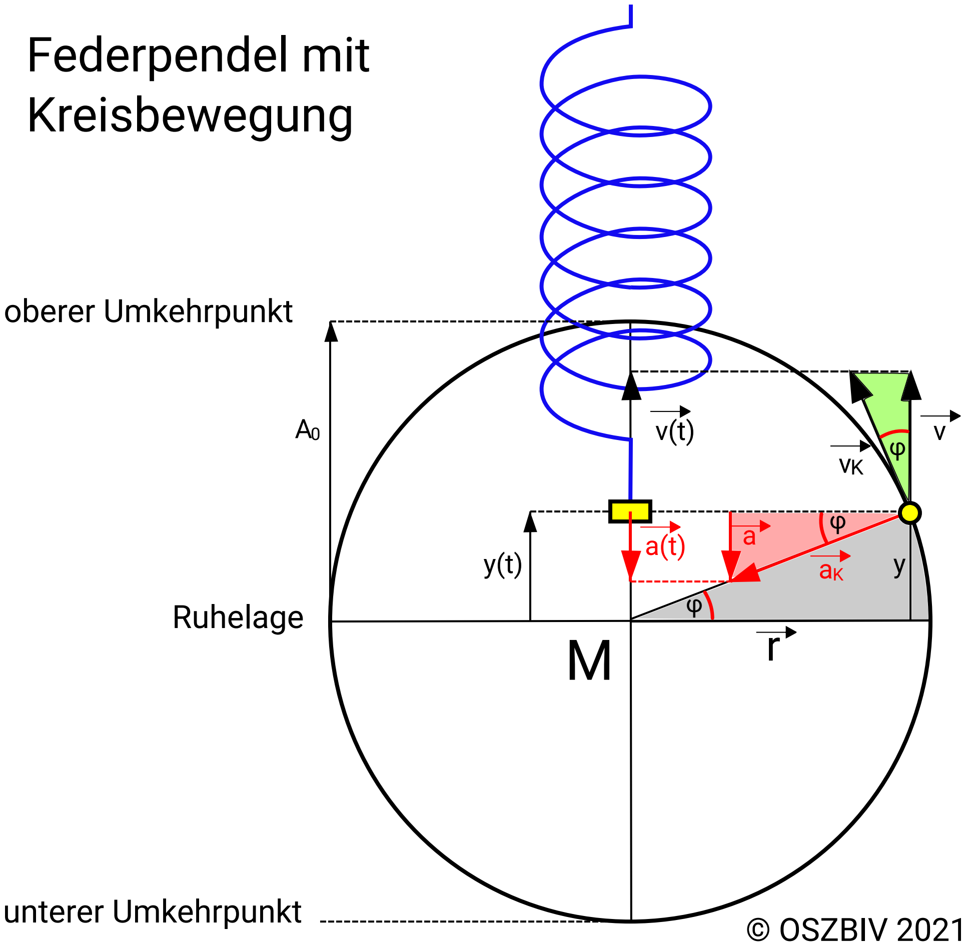
Herleitung von Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung



Für die Elongation der Schwingung hatten wir die folgende Formel hergeleitet:

$$y(t)=A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega=\frac{2\pi}{T} \quad \text{Siehe graues Dreieck.}$$

Die Bahngeschwindigkeit v_K zeigt in jedem Punkt tangential vom Kreis weg und besitzt immer den gleichen Betrag. Die senkrechte Komponente der Bahngeschwindigkeit in einem Punkt entspricht der Geschwindigkeit des Federpendels bei der Elongation y.
Aus dem grünen Dreieck in der Skizze kann man entnehmen, dass für v gilt:
mit v: Ankathete und v_K : Hypothenuse ergibt sich cos phi= an / hyp <=> an = cos phi * hyp
1.) $v=v_K \cdot \cos\phi$

Weil sich die Geschwindigkeit und Winkel dauernd ändern schreiben, wir dafür:

2.) $v(t)=v_K \cdot \cos(\phi(t))$ oder: $v(t)=v_K \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

3.)Für die Bahngeschwindigkeit gilt: $v_K=\frac{2\pi \cdot r}{T}=\omega \cdot r=A_0 \cdot \omega$ mit $r=A_0$ aus der Skizze.

Einsetzen in die Gleichung für v(t) liefert:

4.) $\boxed{v(t) = A_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}$ Das ist die Gleichung für die Momentangeschwindigkeit des Federpendels.

Auf der Kreisbahn ist die Radialbeschleunigung a_K immer zum Kreismittelpunkt gerichtet und besitzt immer den gleichen Betrag. Die senkrechte Komponente der Radialbeschleunigung entspricht der Beschleunigung des Federpendels bei der Elongation y.
Aus dem roten Dreieck in der Skizze kann man entnehmen, dass
mit a_K: Hypothenuse, a: Gegenkathete ergibt sich $\sin\phi = \frac{Geg}{Hyp}$ <=> $Geg = Hyp \cdot \sin\phi$ Mit den bezeichnungen aus dem roten Dreieck ergibt sich dann:
5.) $a = -a_K \cdot \sin\phi$
Das Minuszeichen bedeutet, dass die Beschleunigung a beim Federpendel in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie die Elongation y. Weil sich die Beschleunigung und der Winkel dauernd ändern, schreiben wir dafür wieder:
6.) $a(t) = -a_K \cdot \sin(\phi(t))$ oder : $a(t) = -a_K \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Für die Radialbeschleunigung gilt:

$$a_K = \frac{v_K^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = A_0 \cdot \omega^2$$

Einsetzen in die Gleichung für a(t) liefert:

7.) $\boxed{a(t) = -A_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)}$ Das ist die Gleichung für die Momentanbeschleunigung des Federpendels.

Herleitung Schwingungsdauer des Federpendels

Für die momentane Kraft auf das Federpendel gilt:

8.) $F(t) = m \cdot a(t) = -m \cdot \omega^2 \cdot A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ also: $\boxed{F(t) = -m \cdot \omega^2 \cdot y(t)}$.

Für die Kraft bei einer bestimmten Elongation gilt einfach: $F(y) = -m \cdot \omega^2 \cdot y$
Weil diese Kraft die Federkraft ist gilt auch das Hoock‘schen Gesetz $F(y) = -D \cdot y$
Gleichsetzen der beiden Kräfte ergibt:

9.) $D = m \cdot \omega^2$ oder $D = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$ | *T^2 | :D
Auflösen nach T ergibt die Schwingungsdauer des Federpendels:

$$T^2 = m \cdot \frac{4\pi^2}{D} \quad \text{<=>} \quad T = \sqrt{\frac{m \cdot 4\pi^2}{T}}$$

10.) $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$