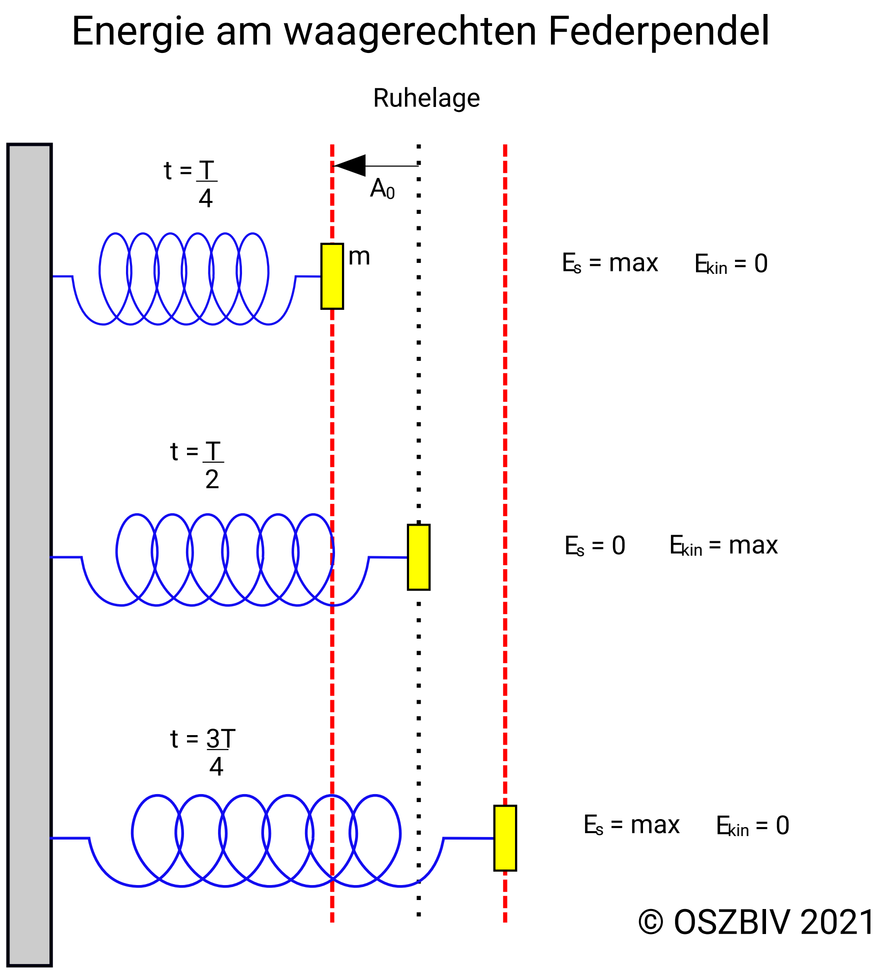
Herleitung der Energie des harmonischen Oszillators

Bei der Schwingung des Federpendels werden ständig Energieformen ineinander umgewandelt. An den Umkehrpunkten ist die Geschwindigkeit des Pendels kurzzeitig null und damit die kinetische Energie auch. Dafür ist die Spannenergie maximal.
In der Ruhelage ist die kinetische Energie maximal und die Spannenergie dafür null.



Für die Spannenergie während der Schwingung gilt:

$$E_S = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s(t))^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A_0^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

wobei A_0 die Amplitude ist. An den Umkehrpunkten gilt:

$\sin^2(\omega \cdot t) = 1$ womit sich die Formel für die Spannenergie vereinfacht zu:

$$E_S = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A_0^2$$

Fragen:
1.) Warum gilt an den Umkehrpunkten $\sin^2(\omega \cdot t) = 1$?
2.) Wie groß ist die Spannenergie eines Federpendels, bei einer Federkonstante mit D = 0,75N/m und einer Amplitude von 7cm? Ergebnis: 0,00183J

Für die kinetische Energie während der Schwingung gilt:

$$E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(v(t))^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t)$$ wobei v_0 die maximale Geschwindigkeit ist.

Diese beiden Energieformen werden beim harmonischen Oszillator ständig ineinander umgewandelt, was eine Folge des Energieerhaltungssatzes ist.
Der Energieerhaltungssatz besagt für das waagerechte Federpendel, dass zu jedem Zeitpunkt folgendes gilt:

$$E_{Ges}=E_S+E_{kin}$$

Aus der Grafik entnimmt man, dass in dem Moment, in dem die kinetische Energie null ist, die Spannenergie maximal ist. Das bedeutet dass die Gesamtenergie gleich der Spannenergie ist:

$E_{Ges}=E_S$, d.h. für die Gesamtenergie ergibt sich:

$$\boxed{E_{Ges}=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A_0^2}$$

Löst man die Formel für die Schwingungsdauer des harmonischen Pendels:

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ nach D auf, so erhält man:

$$D=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Damit lässt sich D in der Formel für die Gesamtenergie ersetzen und es ergibt sich die Formel für die Gesamtenergie:

$E_{Ges}=2\frac{\pi^2\cdot m}{T^2}\cdot A_0^2$ oder $\boxed{E_{Ges}=2\pi^2\cdot m\cdot f^2\cdot A_0^2}$ mit $f=\frac{1}{T}$

Aufgaben:
3.) Beschreiben Sie, von welchen Größen die Energie des harmonischen Oszillators der Masse m abhängt.

4.) Berechnen Sie die Gesamtenergie einen harmonischen Oszillators der Masse m=200g, bei einer Amplitude von 4cm und einer Frequenz von 2Hz. Ergebnis: 0,025J

5.) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit der Masse des Federpendels aus Aufg. 4?
An der Ruhelage ist die kinetische Energie maximal und die Spannenergie null.

$E_{Ges}=E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ | *2 |:m

$\frac{2\cdot E_{Ges}}{m}=v^2$ | Wurzel $\qquad v=\sqrt{\frac{2\cdot E_{Ges}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}025\,J}{0{,}2\,kg}}=0{,}5\,\frac{m}{s}$