Herleitung der Bahnenergien des Elektrons im Wasserstoffatom 7.1.22

Wir hatten schon eine Formel für die Bahnradien hergeleitet:

$$r_n = \frac{n \cdot h}{2\pi \cdot m_e \cdot v_n}$$

und die Geschwindigkeit kann man einfach die Bahnbedingung des 1. Postulats nach v auflösen:

$$2\pi \cdot r \cdot m_e \cdot v = n \cdot h \quad \text{also:} \quad v_n = \frac{n \cdot h}{2\pi \cdot r \cdot m_e}$$

Die Bahnenergie E_B setzt sich aus der kinetischen und der potentiellen Energie zusammen:

$$E_B = E_{kin} + E_{pot}$$

Für die kinetische Energie erhält man nach Einsetzen von v_n und r_n:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e \cdot v_n^2 = \frac{1}{2} \frac{m_e \cdot n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 m_e^2 r_n^2} = \frac{1}{2} \frac{m_e \cdot n^2 \cdot h^2 \cdot \pi^2 \cdot m_e^2 \cdot e^4}{4\pi^2 m_e^2 \cdot n^4 \cdot h^4 \epsilon^2}$$ Nach Kürzen ergibt sich:

$$E_{kin} = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2}$$

Für die potentielle Energie erhält man nach Einsetzen von r_n:

$$E_{pot} = \frac{-1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_n} = \frac{-e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_n} = \frac{-1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot e^2}{n^2 \cdot h^2 \cdot \epsilon_0}$$ Nach Kürzen ergibt sich:

$$E_{pot} = \frac{-m_e \cdot e^4}{4 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2}$$

Die Bahnenergie ist die Summe der beiden Energien:

$$E_B(n) = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2} - \frac{m_e \cdot e^4}{4 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2}$$ also ergibt sich:

$$E_B(n) = \frac{-m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot n^2}$$ Diese Formel enthält nur Naturkonstanten.