Relativistische Geschwindigkeit von Elektronen (ph-3 2021)

Werden Elektronen mit einer sehr hohen Spannung beschleunigt, so nähert sich ihre Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit. Dabei nimmt ihre Masse nach Einstein zu. Deshalb kann ihre Geschwindigkeit nicht mehr mit der alten Formel für die kinetische Energie berechnet werden. Es muss relativistisch gerechnet werden, d.h. mit Berücksichtigung der Relativitätstheorie von Einstein (1905).

Einstein leitete einen Ausdruck für die Masse eines Körpers in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit her:

$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ Dabei ist m_0 die Ruhemasse (v=0).

Für die Gesamtenergie von relativistischen Teilchen leitete er folgenden Ausdruck her:

$E_G=m(v)\cdot c^2+m_0\cdot c^2$ Dabei ist der Term $m_0\cdot c^2$ die Ruheenergie E_R und der Term $m(v)\cdot c^2$ entspricht der kinetischen Energie.

$E_G=E_{kin}+E_R$

Damit erhält man für die kinetische Energie:

$$E_{kin}=E_G-E_R$$

Damit ergibt sich für die kinetische Energie:

$$E_{kin}=m(v)\cdot c^2-m_0\cdot c^2$$

Einsetzen der Formel für die geschwindigkeitsabhängige Masse liefert:

$$E_{kin}=\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0\cdot c^2$$

Für beschleunigte Elektronen in der Elektronenstrahlröhre gilt folgende Energiebilanz:

$$E_{el}=E_{kin}$$

Einsetzen der Formel für die elektrische Energie und der hergeleiteten relativistischen Formel für die kinetische Energie ergibt:

$$e\cdot U_B=\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0\cdot c^2$$

Klammert man nun $m_0\cdot c^2$ aus und dividiert man die Gleichung dann dadurch , so erhält man:

$$\frac{e \cdot U_B}{m_0 \cdot c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

oder:

$$\frac{e \cdot U_B}{m_0 \cdot c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Multipliziert man die Wurzel und dividiert man durch die komplette linke Seite der Gleichung, so erhält man:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\frac{e \cdot U_B}{m_0 \cdot c^2} + 1}$$ Quadrieren liefert:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\left(\frac{e \cdot U_B}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2}$$ Subtrahiert man 1 und multipliziert dann ($-c^2$), so ergibt sich:

$$v^2 = \left(\frac{-1}{\left(\frac{e \cdot U_B}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2} + 1\right) \cdot c^2$$

Durch Ausmultiplizieren und Wurzelziehen erhalten wir das Endergebnis für die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{c^2}{\left(\frac{e \cdot U_B}{m_0 \cdot c^2} + 1\right)^2}\right)}$$

Mt dieser Formel erhält man für Elektronen, die mit 1,2 MV beschleunigt werden eine Geschwindigkeit von 271,35 * 10^6 m/s. Das entspricht ca. 90% der Lichtgeschwindigkeit.

Dagegen hatten wir bei nicht relativistischer Rechnung 649,68 * 10^6 m/s erhalten. Diese Geschwindigkeit wäre Überlichtgeschwindigkeit, was nach Einstein unmöglich ist. Diese Rechnung darf also bei hohen Spannungen nicht angewendet werden.